数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 1-23

モンスターの maximal local subgroups の分類とその応用

吉荒 聡
Satoshi Yoshiara
東京女子大学 文理学部 数理学科

この原稿は２００３年１２月１５日に京都大学数理解析研究所で行われた筆者の連続講演の中から、モンスターの極大２部分群の分類に関する部分（Meierfrankenfeld と Shpectorov の論文 [MS], [Me] の紹介）をまとめたものです。この分類の応用である筆者の仕事については今回は省略しました。幾つかの結果を認めれば、有限群論としてはむしろ初等的な議論が多いので、非専門家にも何とか読めるような記述を心懸けました。専門家には冗漫と感じられる部分が多々あると思いますが、お許し下さい。

以下において、特に断らない限り、記号 G は一般の有限群を表し、記号 p は群 G の位数を割り切る素数を表します。また、有限群 G の p-部分群 (位数が p のべきであるような部分群) で正規部分群であるものすべての積を考えると、それは群 G の正規な p-部分群中で包含関係に関して最大のものになりますが、この部分群を記号 $O_p(G)$ で表すことにします。

1. 結果の紹介

はじめに基本的な用語を復習します。(例えば [Ko, p.203] を参照されたい。)

定義 1.1 有限群 G の部分群 L が **p-局所部分群** (p-local subgroup) であるとは、L がある自明でない p-部分群 P の正規化群になっていることです: $L = N_G(P)$. 一般には様々な p-局所部分群が存在しますが、それらのうち包含関係に関して極大なものを**極大 p-局所部分群** (maximal p-local subgroup) と呼びます。

コメント (1) L が群 G の極大 p-局所部分群であれば、$Q := O_p(L) \neq 1$ に対して $L \leq N_G(Q) \leq G$ なので、L の p-局所部分群としての極大性から次を得ます。

$$L = N_G(Q), \quad Q = O_p(L) \neq 1$$

(2) $O_p(G) = 1$ であるような群 G を考えます。例えば非可換単純群がその例です。

群 G の極大部分群（真部分群のうち包含関係に関して極大なもの）M が $Q := O_p(M) \neq 1$ を満たすならば、M の極大性と $O_p(G) = 1$ から、$M = N_G(Q)$ は極大 p-局所部分群です。すなわち、$O_p(G) = 1$ を満たす群 G の極大部分群 M については、M が G の極大 p-局所部分群であることと性質 $O_p(M) \neq 1$ は同値です。

しかし、一般には極大 p-局所部分群は極大部分群になるとはいえません。

さて Meierfrankenfeld と Shpectorov は位数が最大の散在型単純群であるモンスター及び、そのある位数2の元の中心化群の剰余群として得られる散在型単純群ベビーモンスターに対して、それらの極大2局所部分群(正確には、それらの共役類を)を決定しました。この成果により、すべての散在型単純群とその位数を割り切るすべての素数 p について、極大 p-局所部分群が決定されたことになります。(文献に明示されているのは、極大 p-局所部分群のうち、極大部分群であるもののみである場合が殆どです。)

これは非常に大きな影響をもたらす結果です。例えば、本稿では省略しますが、この分類に基づいて、モンスター、ベビーモンスターの根基部分群がすべて求められます(筆者による)。更に、根基2部分群の分類を用いて、すべての散在型単純群について素数2を法とするコホモロジー環の構造が、ある(階数高々5の)有限幾何から出発してホモトピーコリミットを用いて記述できるという、Benson と S.D. Smith による結果も得られています。

更に、論文 [MS] で展開されている論法は、モンスターの幾何(階数 1, 2, 3, 5 の特異部分空間と「箱船」と呼ばれる階数 10 の基本可換群からなる)を利用した自然なもので、大変美しく、広く紹介される価値があるものと思います。

そこで、本稿では、論文 [MS],[Me] の要点を紹介することにします。本当はベビーモンスターとモンスターをほぼ並行して扱うことが出来るという利点も味わって頂きたいのですが、多少煩瑣になるので、ここではモンスターだけに特定して話を進めます。

まず、記号の説明を後回しにして結果を書きます。ここでは(同型というほど厳密ではなく)群の大まかな構造を与えていると言う意味で、記号 $\sim$ を用いています。また、構造を表わすのにアトラス [At] で使われている記法を用います。部分群 P_i $(i = 1, 2, 3, 5, 10)$ については、後で多少詳しく説明します。

Theorem 1 *(Meierfrankenfeld, Shpectorov [MS],[Me])* モンスターの極大2局所部分群は次のいずれかの形の部分群に共役である。

$$\begin{aligned}
L_1 &\sim 2\cdot BM \\
L_2 &\sim 2^2.{}^2E_6(2).S_3 \\
P_1 &\sim 2_+^{1+24}Co_1 \\
P_2 &\sim 2^2.2^{11}.2^{22}.(L_2(2)\times M_{24}) \\
P_3 &\sim 2^3.2^6.2^{12}.2^{18}.(L_3(2)\times 3S_6) \\
P_5 &\sim 2^5.2^{10}.2^{20}.(L_5(2)\times S_3) \\
P_{10} &\sim 2^{10+16}\Omega_{10}^+(2)
\end{aligned}$$

上の7つの代表元のうち、L_j $(j = 1, 2)$ と P_i $(i = 1, 2, 3, 5, 10)$ は様相が異なります。分類も、上の二つが生じる部分とそれ以外の5個が得られる部分に応じて論文 [Me] と [MS] に分けられています。それを説明するために、次の用語を導入します。

定義 1.2 有限群 L が**標数 p-型**であるとは $Q=O_p(L)$ が

$$C_L(Q)\leq Q$$

を満たすことです。ここで $C_L(Q)$ は Q の L における中心化群を表します。(標数 p-型の定義は標準化されていません。文献によってはこれより弱い定義を採用していることがあります。)

コメント (1) 上の定義は $C_L(Q)=Z(Q)$ (Q の中心) とも言いかえられます。

(2) 群 G の極大 p-局所部分群 L に対して、$O_p(L)=Q$ とおくと、$N_G(Q)=L$ でしたから、$C_L(Q)=C_G(Q)\cap L=C_G(Q)\cap N_G(Q)=C_G(Q)$ です。従って「G の極大 p-局所部分群 L が標数 p 型である」という条件は、

$$C_G(Q)\leq Q$$

とも言い換えられます。

モンスター M の極大2局所部分群のリストのうち、標数2型であるものは P_i $(i=1,2,3,5,10)$ です。これらの群では $O_2(P_i)$ は $i=1,2,3,5,10$ に応じて、それぞれ 2_+^{1+24}, $2^2.2^{11}.2^{22}$, $2^3.2^6.2^{12}.2^{18}$, $2^5.2^{10}.2^{20}$, 2^{10+16} と記される構造を持つ、位数 2^{25}, 2^{35}, 2^{39}, 2^{35}, 2^{26} の群です。これらの中心化群 $C_M(O_2(P_i))=C_{P_i}(O_2(P_i))$ は位数 2^i の基本可換群 (位数2の群の直積) で、中心 $Z(P_i)$ に一致していることが確認できます。従って、確かにこれらの群は標数2型です。

一方、$O_2(L_j)$ $(j=1,2)$ は位数 2^j の基本可換群で、$C_M(O_2(L_1))=C_{L_1}(O_2(L_1))=L_1$ 及び $C_M(O_2(L_2))=C_{L_2}(O_2(L_2))\sim 2^2.{}^2E_6(2)$ が確かめられるので、これらは標数2型ではありません。

以後の本稿の構成は次の通りです。第2節では、大きな格別部分群 (large extraspecial subgroup) を持つ群についての基本的事項を解説します。第3節では、モンスターの定義 (これが本当に定義になっていることを示すのは大変難しい問題ですが) を与えたのち、第2節の基本事項に基づいて、ゴーレイ符号・リーチ格子に関する多少の経験を前提に、モンスターの標数2型の極大2局所部分群を記述します。第4節ではモンスターの極大2局所部分群のうち、標数2型でないものの分類の大筋を示します。第5節では、モンスターの極大2局所部分群のうち標数2型であるものの分類において、最も重要な部分を取り上げて解説を試みます。

2. 大きな格別部分群を持つ群

定義 2.1 非可換な2群 Q は、中心 $Z(Q)$ の位数が2で、中心による剰余群 $Q/Z(Q)$ が基本可換群であるとき**格別2群** (extraspecial 2-group) であるという。

基本可換２群は、２元体上のベクトル空間とみなせるが、格別２群の剰余群には次のように二次形式が定義される。格別２群 Q の中心 $Z(Q)$ は位数２なので、その生成元を z とするとき、全単射 $Z(Q) \ni z^i \mapsto i \in GF(2) = \{0,1\}$ により $Z(Q)$ と２元体 $GF(2)$ を同一視する。中心による剰余群 $V := Q/Z(Q)$ の各元（コセット） $\bar{x} = xZ(Q)$ $(x \in Q)$ に対して

$$q(\bar{x}) := x^2$$

とおくと、２元体上のベクトル空間 V から２元体 $GF(2)$ への写像 q が、コセット $\bar{x}$ の代表元 $x \in Q$ の取り方によらずに定義できる。

$$b_q(\bar{x},\bar{y}) := q(\bar{x}\bar{y})q(\bar{x})q(\bar{y}) = [x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

が確かめられるので、b_q は双一次形式でありシンプレクティック $(b_q(\bar{x},\bar{x}) = 0)$ で非退化 $(b_q(\bar{x},\bar{y}) = 0, \forall\bar{y} \in V$ ならば $x \in Z(Q))$ であることもわかる。つまり写像 q は V 上の非特異な二次形式である。

シンプレクティック形式 b_q が非退化なので、V の２元体上のベクトル空間としての次元は偶数となり、それを $2n$ とすると、シンプレクティック形式 b_q に関する V の極大全等方的部分空間の次元は n である。V のシンプレクティック形式 b_q に関する全等方部分空間のうち二次形式 q に対して**特異**なベクトル $\bar{x}$ $(q(\bar{x}) = 0)$ のみからなるものを q に関して**全特異**な部分空間という。包含関係に関して極大な全特異部分空間の次元は n または $n-1$ であり、これに応じて二次形式 q は**プラス型**または**マイナス型**と呼ばれる。q, b_q の定義から V の極大全特異部分空間の Q における逆像は、Q の極大な基本可換部分群となる。従って Q の極大な基本可換部分群は q がプラス型かマイナス型かに応じて、位数 2^{n+1} か 2^n となる。これに応じて、格別２群の同型類も二つに分かれることが知られている。それぞれを 2_+^{1+2n}, 2_-^{1+2n} と記す。

二元体上のベクトル空間 V の線形全単射 g で二次形式 q を保つ $(q(\bar{x}^g) = q(\bar{x}))$ もの全体のなす群を、q がプラス型かマイナス型かに応じて $SO_{2n}^+(2)$ または $SO_{2n}^-(2)$ と記す。それぞれの交換子部分群を $\Omega_{2n}^+(2)$, $\Omega_{2n}^-(2)$ と記す。またこれに応じて $\varepsilon = 1$ または $\varepsilon = -1$ としたとき、ゼロベクトルではない特異ベクトルは全部で $(2^n - \varepsilon)(2^{n-1} + \varepsilon)$ 個あることが知られている。本稿で主に扱うのはプラス型なので、それのみについて基本事項を補足しておく。指数 $[SO_{2n}^+(2) : \Omega_{2n}^+(2)]$ は 2 に等しく、極大全特異部分空間全体の集合上に、$SO_{2n}^+(2)$ は可移に作用するが $\Omega_{2n}^+(2)$ は二つの軌道 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を持つ。極大全特異部分空間 W^1, W^2 が同一の $\Omega_{2n}^+(2)$-軌道に属するための必要かつ十分な条件は $\dim(W^1) - \dim(W^1 \cap W^2)$ が偶数であることである。また、$i = 1, \ldots, n-1$ のそれぞれに対して $\Omega_{2n}^+(2)$ は次元 i の全特異空間の全体に可移に作用する。次元 $n-1$ の全特異部分空間を含む極大全特異部分空間（次元 n）は丁度２個存在し、一方は軌道 $\mathcal{O}_1$ に、もう一方は軌道 $\mathcal{O}_2$ に属する。

さてモンスター M の極大２局所部分群のうち P_1 と記されたものに対する $O_2(P_1)$ は位数 25 のプラス型の格別２群 2_+^{1+24} である。従って $O_2(P_1)$ の極大な基本可換部分群の位数は $2^{13} = 2^{1+12}$ である。$O_2(P_1)$ の中心 $Z(O_2(P_1))$ の生成元を z とすれば $P_1 = C_M(z)$ であ

る。また $C_M(O_2(P_1)) = Z(O_2(P_1))$ であるので、次の一般的な用語を用いればモンスターは大きな格別部分群を持つ。

定義 2.2 有限群 G は次の条件を満たす位数 2 の元 z が存在するとき、**大きな格別部分群を持つ**と呼ばれる。

(a) $Q_z := O_2(C_G(z))$ は格別 2 群である。

(b) $C_G(Q_z) \leq Q_z$

条件 (b) から $C_G(Q_z) = Z(Q_z)$ だが、これは条件 (a) により $\langle z \rangle$ に等しい。$C_G(z)$ の 2 シロー群 T を任意にとると T は $C_G(z)$ の正規な 2 部分群 Q_z を含むので、$C_G(Q_z) = \langle z \rangle$ から $C_G(T) = Z(T) = \langle z \rangle$ である。このことから T は群 G の 2 シロー部分群でもあることがわかる（さもなくば T を真に含む G の 2 部分群 T_0 が存在するが、これについても $C_G(T_0) = Z(T_0) = \langle z \rangle$ であり、$T_0 \leq C_G(z)$ となってしまう)。また、この議論（とシロー部分群の共役性）から、z' が G の位数 2 の元で $C_G(z')$ が G の 2 シロー群を含むならば、z' は z と G において共役であることもわかる。

一般論を展開する前に、大きな格別群を持つ単純群の例を挙げよう。定義体の標数が 2 であるような Lie 型の有限単純群の多くがこの例である。ただし、シンプレクティック群はこの例ではない。

典型例をあげる。2 元体上の $n+2$ 次元ベクトル空間 V の線形全単射全体がなす群 $G = L_{n+2}(2)$ $(n \geq 2)$ を考え、z をその**移換** (transvection) とする。すなわち、V の $n+1$ 次元ベクトル空間 H とその上の 1 次元ベクトル空間 p が存在して、z は H のベクトルをすべて固定し、$p = [V, z] = \{-x + x^z \mid x \in V\}$ であるとする。

p の基底を一番目にとって拡張した H の基底を作り、さらにそれを拡張して V の基底を作れば、z の右からの作用をこの基底に関して表現して得られる行列は、対角成分と $(n+2, 1)$ 成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような下三角行列である。このとき、対角成分がみな 1 で、1 列と $n+2$ 行の成分以外はすべて 0 であるような行列は、V/H, H/p, p のそれぞれの上に自明に作用する G の元に対応するので、その全体 Q_z は $C_G(z)$ の正規部分群である。簡単な計算から、Q_z はプラス型の格別 2 群 2_+^{1+2n} であることがわかる（中心は $\langle z \rangle$）。また $C_G(z)$ は Q_z と、対角成分以外の $1, n+2$ 行、$1, n+2$ 列の成分がすべて 0 であるような行列 (H/p 上の線形全単射に対応) のなす群 $L_z \cong L_n(2)$ の半直積であることが確かめられる：$Q_z \trianglelefteq C_G(z)$, $C_G(z) = Q_z L_z$, $L_z \cap Q_z = 1$. 従って $Q_z = O_2(C_G(z)) \cong 2_+^{1+2n}$ であり、$z \in Q_z$ より $C_G(Q_z) \leq C_G(z)$ から $C_G(Q_z) = Z(Q_z)$ となる。従って、G は確かに大きな格別部分群を持つ。

（一方、単純群ではない群で、大きな格別部分群を持ち、位数 2 の元の中心化群の構造が上と全く同じであるものが存在する。二元体上の $n+1$ 次元ベクトル空間 $V(n+1, 2)$ に線形群 $L_{n+1}(2)$ が自然に右から作用するが、この作用に関する半直積 $H = V(n+1, 2) : L_{n+1}(2)$

を考える。$O_2(H) = V(n+1,2)$ であるが、$V(n+1,2)$ の非ゼロベクトル z に対しては、その中心化群 $C_H(z)$ は $V(n+1,2)$ と $L_{n+1}(2)$ におけるベクトル z の固定部分群 P_z の半直積である。z を一番目のベクトルとして $V(n+1,2)$ の基底をとり、これに関する行列表現を考えれば $O_2(P_z)$ は対角成分と第一列の成分以外は 0 であるような行列全体のなす位数 2^n の基本可換部分群であり、P_z は $O_2(P_z)$ と $V(n+1,2)/\langle z\rangle$ 上の線形変換群のなす部分群 $L_z \cong L_n(2)$ の半直積である。従って $C_H(z) = (V(n+1,2)O_2(P_z))L_z$ であるが、ここで $O_2(C_H(z)) = V(n+1,2)O_2(P_z)$ は $\langle z\rangle$ を中心とする格別 2 群 2_+^{1+2n} であることが確かめられる。そこで H は大きな格別部分群を持つ。また、$C_H(z)$ が上の例の中心化群 $C_G(z)$ と同型であることも確認できる。

このように、大きな格別部分群を持つとしても、そこにおける位数 2 の元の中心化群の構造から全体の群の (同型をのぞいた) 一意性がいえるわけではない。しかしながら、全体の群を単純とすれば可能な同型類は有限個であるというのが Brauer-Fowler の定理であった。以下の表でも、単純群 J_2 と J_3 の大きな格別群を与える位数 2 の元の中心化群の構造は $2_-^{1+4}:\Omega_4^-(2)$ に等しい。また、$L_5(2)$, He, M_{24} の大きな格別群を与える位数 2 の元の中心化群もすべて $2_+^{1+6}:L_3(2)$ に等しい。)

また、多くの散在型単純群は大きな格別部分群を持つ。より正確には、9 個の散在型単純群 J_1, HS, McL, Ru, ON, $Co3$, Fi_{22}, Ly, F_{23} 以外の 17 個の散在型単純群はすべて大きな格別部分群を持っている。

G	$C_G(z)$	G	$C_G(z)$
M_{11}	$2_-^{1+2}:S_3$	M_{12}	$2_+^{1+4}\cdot S_3$
J_2	$2_-^{1+4}:\Omega_4^-(2)$	J_3	$2_-^{1+4}:\Omega_4^-(2)$
M_{22}	$2_+^{1+6}:3$	M_{23}	$2_+^{1+6}:F_7^3$
M_{24}	$2_+^{1+6}:L_3(2)$	He	$2_+^{1+6}:L_3(2)$
Suz	$2_-^{1+6}\cdot\Omega_6^-(2)$		
$Co2$	$2_+^{1+8}:Sp_6(2)$	$Co1$	$2_+^{1+8}\cdot\Omega_8^+(2)$
HN	$2_+^{1+8}\cdot(A_5\times A_5)2$	Th	$2_+^{1+8}\cdot A_9$
J_4	$2_+^{1+12}\cdot 3M_{22}2$	F'_{24}	$2_+^{1+12}\cdot U_4(3)2$
BM	$2_+^{1+22}\cdot Co2$	M	$2_+^{1+24}\cdot Co1$

以下、大きな格別群を持つ有限群 (特に非可換単純群) に対する一般論を解説する。以後この節においては、次の仮定と記号を用いる。

G は大きな格別群を持つ有限群とし、その定義 2.1 における位数 2 の元 z の共役類を

$$\mathcal{S} := z^G = \{z^g = g^{-1}zg \mid g \in G\}$$

と記す。また $x \in \mathcal{S}$ に対して $Q_x := O_2(C_G(x))$ とおく。

S に属する位数 2 の元のことを**特異元**と呼ぶ。現時点では G は一般の有限群であり、このように名付ける積極的な理由はないが、G がモンスターであるとき（先に注意したように大きな格別部分群を持っていた）には、この命名の一つの理由付けとして次の事実があげられる：プラス型の二次形式を備えた 2 元体上 10 次元のベクトル空間である「箱船」と呼ばれる基本可換 2 部分群がモンスター中に存在するが、箱船に属する特異元は、この二次形式に関する特異ベクトルに対応するのである (命題 6(3) 参照)。

まず、特異元の共役に関する基本的情報を記述しよう。Glauberman の Z^*-定理（と呼ばれる有限群論の一つの基本的な定理は）から、次がわかる：G が非可換単純群ならば、$\mathcal{S} \cap C_G(z) \neq \{z\}$.　この結果はもう少し強くすることが出来る。[MS, Lemma 3.1] において、次が示されている。（後半、つまり $\mathcal{S} \cap Q_z = \{z\}$ が成立する場合には更に多くの制限が得られる。）

Lemma 2 G が非可換単純群ならば、$\mathcal{S} \cap Q_z \neq \{z\}$ であるか、またはすべての $x \in (\mathcal{S} \cap C_G(z)) \setminus \{z\}$ に対して $|Q_z \cap Q_x| \leq 2^2$ が成り立つ。

（この補題から、大きな格別部分群を持つ非可換単純群の大部分においては前半が成立していることが示される。そのためには $C_G(z)/Q_z$ やその剰余群 $Q_z/\langle z \rangle$ への作用が具体的に知られている必要があるが。）

特異な部分群とその正規化群についての基本結果を述べよう。

定義 2.3 二つの特異元 $x, z \in \mathcal{S}$ に対して、$x \in Q_z$ が成り立つとき、x は z に**直交**するという。

Lemma 3 直交するという関係は特異元の集合 $\mathcal{S}$ 上の対称な関係である。つまり、$z, x \in \mathcal{S}$ に対して $x \in Q_z$ ならば $z \in Q_x$ である。

この重要な基本定理の証明は [As, Lemma 8.7(3)], [MS, Lemma 4.1] を参照されたい。

定義 2.4 G の基本可換 2 部分群 U は、次を満たすとき**特異** (singular) であると呼ばれる。

(a) $U^{\#} = U \setminus \{1\} \subseteq \mathcal{S}$

(b) U の任意の元 u, v は互いに直交する。

記号 2.5 G の特異な部分群 U に対して、次のようにおく。

$$Q_U := \cap_{u \in Q^{\#}} Q_u,$$
$$L_U := \langle Q_u \mid u \in U^{\#} \rangle$$

$x, y \in \mathcal{S}$, $x \neq y$ ならば　$Q_x \cap Q_y$ は基本可換２群であることに注意しよう。実際 Q_x は格別群なので $Q_x/\langle x \rangle$ は基本可換群であり、Q_x の任意の元の２乗は $\langle x \rangle$ に入り、１または x である。同様に Q_y の任意の元の２乗は１または y である。従って $Q_x \cap Q_y$ の任意の元の２乗は１であり、よって $Q_x \cap Q_y$ は基本可換２群である。

これより特に、位数４以上の特異な部分群 U に対して、Q_U は基本可換２群であることがわかる。

Lemma 4 *([MS, Lemma 4.2])* 大きな格別部分群を持つ群 G の特異な部分群 U に対して次が成立する。

(1) $U \leq Q_U \leq L_U \leq N_G(U)$

(2) U が位数 2^n $(n \geq 2)$ の基本可換群のとき群 L_U は U 上に $L_n(2)$ を引き起こす。特に $N_G(U)/C_G(U) \cong L_n(2)$ である。

(3) L_U は剰余群 Q_U/U に自明に作用する。更に $Q_U \setminus U$ に元 x が存在すれば $C_{L_U}(U)$ はコセット xU の元の上に可移に作用する。

証明　主張 (1) は定義を冷静に振り返れば確認できる。

(2) $|U| = 2^n$ $(n \leq 2)$ とし、基本可換２群 U を２元体上 n 次元のベクトル空間とみなす。線形代数における基本変形を想起すれば、線形群 $L_{n+2}(2)$ は移換の全体により生成されていることがわかる。従って主張の前半を示すには U の任意の $n-1$ 次元部分空間 H と H の任意の１次元部分空間 p に対して (p, H) に関する移換を引き起こす L_U の元 z、すなわち $H = C_U(z)$, $p = [U, z]$ を満たす $z \in L_U$ の存在を示せば十分である。このとき、後半の主張は基本可換２群 U の全自己同型群 $Aut(U)$ が $L_n(2)$ と同型であることからの必然の帰結である。

さて p の基底 u を選べば、$u \in U^\# \subseteq \mathcal{S}$ であるので格別２群 Q_u を考えることが出来る。U は特異なので（その定義の (b) から）　$H \subset U \subseteq Q_u$ である。剰余群 $\overline{Q_u} := Q_u/\langle u \rangle$ は式 $q(\bar{x}) = x^2$ $(\bar{x} = x\langle u \rangle, x \in Q_u)$ により定義される非特異な二次形式 q を備えていた (定義 2.1 の後の段落参照)。U は Q_u の基本可換２部分群なので、$\overline{U} := U/\langle u \rangle$ は $\overline{Q_u}$ の二次形式 q に関する全特異部分空間であり、特に付随するシンプレクテック形式 b_q に関して全等方的である。$\overline{H} := H/\langle u \rangle$ は $\overline{U}$ の余次元１の部分空間なので、形式 b_q の非退化性から $\overline{Q_u}$ の適当なベクトル $\overline{z}$ $(z \in Q_u)$ を選んで

$$\overline{H} = \overline{U} \cap \overline{z}^\perp$$

と書くことが出来る。ここで $\overline{z}^\perp := \{\overline{v} \in \overline{Q_u} \mid b_q(\overline{z}, \overline{v}) = 0\}$ は $\overline{Q_u}$ の余次元１の部分空間である。$b_q(\overline{z}, \overline{v}) = [z, v]$ であったから、上の等式は $H = C_U(z)$ と同値である。また $\overline{Q_u}$ は可換群なので $[\overline{U}, \overline{z}] = \overline{1}$ であるが $H = C_U(z) \neq U$ であるから $[U, z] = \langle u \rangle$ を得る。従って z $(\in Q_u \leq L_U)$ は $(\langle u \rangle, H)$ に関する U 上の移換を引き起こす L_U の元であり、主張 (2) の前半が示された。

(3) $U^{\#}$ の任意の元 u に対して $Q_U \leq Q_u$ であり、剰余群 $Q_u/\langle u\rangle$ は可換なので $[Q_U, Q_u] \leq \langle u\rangle \leq U$ である。従って群 L_U を生成する部分群 Q_u に対して Q_u は剰余群 Q_U/U 上に自明に作用し、群 L_U は Q_U/U 上に自明に作用する。後半については、$U^{\#}$ の任意の元 u をとる。$x \in Q_U \setminus U$ に対して $U\langle x\rangle$ は Q_u 中の基本可換 2 群であり U を指数 2 で含む。従って上の主張 (2) の前半の証明における議論を U, H, p としてそれぞれ $U\langle x\rangle$, U, $\langle u\rangle$ に適用することが出来て、その結果、適当な Q_u の元 z を取れば $C_{U\langle x\rangle}(z) = U$ 及び $[U\langle x\rangle, z] = \langle u\rangle$ が成立する。従って $[x, z] = u$, つまり $x^z = xu$ である。$z \in Q_u \leq C_{L_U}(U)$ であり、u は $U^{\#}$ の任意の元であったから、これは $C_{L_U}(U)$ がコセット xU の上に可移に作用することを示す。
Q.E.D.

Lemma 5 *[MS, Lemma 4.3]* 特異部分群 U が元 $u_1, \ldots, u_k$ から生成されているとき $Q_U = \cap_{i=1}^{k} Q_{u_i}$ である。

生成元の数 k に関する帰納法を用いて困難なく確認できる。論文の証明を直接参照されたい。

3. モンスターの特異部分群の分類と箱船

はじめに手短にリーチ格子、コンウェイ群 Co_1 の定義を与える。

定義 3.1 24 次元の実数成分の行ベクトルのなす空間 $\mathbf{R}^{24}$ に標準的な二次形式 $q_{\mathbf{R}}$ を考える: $q_{\mathbf{R}}((x_i)_{i=1}^{24}) = \sum_{i=1}^{24} x_i^2$. 付随する対称一次形式 $b_{\mathbf{R}}$ は $b_{\mathbf{R}}((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{24} x_i y_i$ で与えられる。ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{24}$ の有限生成な $\mathbf{Z}$-部分加群 Λ で、次の性質を持つものが（計量を保つ線形全単射による違いを同一視して）一意的に存在することが知られている。これを**リーチ格子**と呼ぶ。

$\Lambda = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{24} \mid b_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z},\ (\forall \mathbf{x} \in \Lambda)\}$,
$q_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ は偶整数だが $q_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = 2$ となる $\mathbf{x} \in \Lambda$ は存在しない。

この格子 Λ の自己同型群 $Aut(\Lambda)$ (24 次実直交行列で Λ の元を Λ の元に移すようなもの全体のなす群) の中心は位数 2 であり、中心による剰余群 $Aut(\Lambda)/Z(Aut(\Lambda))$ は非可換単純群であることが知られている。これをコンウェイ群**ドットワン**といい、Co_1 と記す。Co_1 は散在型単純群のひとつである。

次にモンスターの形式的な‘定義’を与える。

定義 3.2 単純群 M は次の形の大きな格別部分群を持つとき、**モンスター**と呼ばれる。

$$Q_z \cong 2_+^{1+24}, \quad C_G(z)/Q_z \cong Co1$$

コメント (1) もちろんこれがモンスターの定義になっていることを示すためには、このような性質を持つ単純群の存在（存在性）と、この性質を持つ二つの単純群が互いに同型になる（一意性）の双方が示される必要がある。このどちらも自明ではなく、長い議論を経て証明される。これらを示すのが Aschbacher の本 [As] の主目的であり、詳しい記述がある。モンスターのみならず、一意性問題に関しては、1980 年以降に発展したアマルガムとその完備化という手段を用いるのが「群と幾何」での標準的発想である。これに関しては、筆者が 2000 年に数理解析研で行った講演の講演録にも非常に大まかな解説がある。

(2) [MS],[Me] におけるモンスターの極大 2 局所部分群の分類においては、モンスターの基本性質（定義）と大きな格別部分群を持つ有限群の一般論、ゴーレイ符号・リーチ格子とその自己同型群（２４次マシュー群・コンウェイ群ドットワン）の詳細な性質のみが主に用いられる。（他には直交群の拡大の分裂性やあとに述べるグライスの結果（初等的に証明される）が使われる程度である。）分類の理解のためには、上の定義が実際に定義になっていることを信用してもらうだけで十分である。

以降この節では定義 3.2 から出発してモンスター M の特異部分群の分類のあらましを説明する。また、これを用いて「箱船」と呼ばれる位数 2^{10} の基本可換部分群を構成する。以後、前節で大きな格別部分群を持つ一般の群 G に対して用いた記号をそのまま $G = M$ に対して用いる。

はじめに特異部分群の分類について方針を示す。まず位数 2 の特異部分群は特異元で生成されるから、特異元の集合 S が共役類なので、位数 2 の特異部分群は M において互いに共役である。$U_1 = \langle z \rangle$ を位数 2 の特異部分群とすれば $N_M(U_1) = C_M(z)$ の構造は定義 3.2 により（おおよそ）わかっており、更に以下に示すように $Q_{U_1}/U_1 = Q_z/\langle z \rangle$（これは位数 2^{24} の基本可換群であった）への $N_M(U_1)$ の作用も完全に決定できる。そこで以下帰納的に次のように議論する。位数 2^m の特異部分群の共役類が決定され、各共役類の代表元である特異部分群 U_m に対して、そのモンスターにおける正規化群 $N_M(U_m)$ の大体の構造及びその剰余群 Q_{U_m}/U_m への作用が知られていると仮定する。特に $(Q_{U_m}/U_m)^\#$ 上の $N_M(U_m)$-軌道が、その長さや代表元の固定部分群も含めて完全に記述されていたとする。

この前提の元で U_{m+1} を位数 2^{m+1} の特異部分群とする。U_{m+1} の指数 2 の部分群 U_m は定義 2.4 から見て取れるようにやはり特異部分群である。その位数は 2^m だから、前提によって $N_M(U_m)$ の剰余群 Q_{U_m}/U_m への作用が記述できている。ところで $U_{m+1} \setminus U_m$ の元 x をとれば $U_{m+1} = U_m\langle x \rangle$ であり、x は U_m 中の位数 2 の元すべてに直交するから $x \in \cap_{u \in U_m} Q_u = Q_{U_m}$、従って $U_{m+1} = U_m\langle x \rangle$ の剰余群 Q_{U_m}/U_m における像は $(Q_{U_m}/U_m)^\#$ の元となる。従って、U_m を含むような位数 2^{m+1} の特異部分群の $N_M(U_m)$-共役類は $(Q_{U_m}/U_m)^\#$ 上のある $N_M(U_m)$-軌道に対応する。これらの軌道の長さもわかっているので、少し議論することによって $C_M(U_{m+1}) = C_M(U_m) \cap C_M(x)$ 及び $Q_{U_{m+1}} = Q_{U_m} \cap Q_x$（補題 5 による）の位数や大まかな構造もわかる。このとき 補題 4 より $N_M(U_{m+1})/C_M(U_{m+1}) \cong L_{m+1}(2)$ であることから $N_M(U_{m+1})$ のおおよその構造とその剰余群 $Q_{U_{m+1}}/U_{m+1}$ への作用が決定される。

また、$m \geq 2$ ならば Q_{U_m} は $Q_z \cong 2_+^{1+24}$ の基本可換 2 部分群である（記号 2.5 の後の注

意及び補題 5 参照）ので、定義 2.1 の 2 つ後の段落で注意したようにその位数は高々 2^{13} であり、そんなに多くの段階を経ないうちに、モンスターの特異部分群の分類が完成することが見込まれる。実際には、モンスターの特異部分群の最大位数は 2^5 となる。

さて、以上の一般的方針のもとにモンスターの特異部分群の分類を実行してみよう。

はじめに特異元 z に対してその中心化群 $C_M(z)$ は $Q_z = O_2(C_M(z))$ 及び中心 $\langle z\rangle = Z(Q_z) = C_M(Q_z)$ (大きな格別部分群の定義より) を正規化するので、$C_M(z)$ は共役により剰余群 $\overline{Q_z} = Q_z/\langle z\rangle$ に作用する。つまり $g \in C_M(z)$ 及び $\overline{x} \in \overline{Q_z}$ ($x \in Q_z$) に対して $(\overline{x})^g := \overline{x^g} \in \overline{Q_z}$ が矛盾なく定義される。$\overline{Q_z}$ は可換群なので $g \in Q_z$ ならば任意の $\overline{x} \in \overline{Q_z}$ に対して $(\overline{x})^g = \overline{x}$ である。つまり Q_z は $C_M(z)$ の $\overline{Q_z}$ への作用の核に含まれる。そこで剰余群である非可換単純群 $Co_1 \cong C_M(z)/Q_z$ は位数 2^{24} の基本可換群 $\overline{Q_z}$ 上に共役により作用する。**この作用が忠実である**、つまり $C_M(z)$ の $\overline{Q_z}$ への作用の核はちょうど Q_z であることを示そう。実際、もしこの作用の核が Q_z を真に含んでいるならば、$C_M(z)/Q_z \cong Co_1$ の単純性から、$C_M(z)$ 全体が $\overline{Q_z}$ に自明に作用する。従って、すべての $g \in C_M(z)$ とすべての $x \in Q_z$ に対して $\overline{x^g} = \overline{x}$、つまり $x^g = x$ または $x^g = xz$ であるが、後者の場合は $x^{g^2} = x^g z^g = (xz)z = x$ である。そこで $g \in C_M(z)$ として奇素数位数の元を取れば g は Q_z の元すべてと可換であり $g \in C_M(Q_z)$ であるが、一方大きな格別部分群を持つ群の定義から $C_M(Q_z) = Z(Q_z) = \langle z\rangle$ であるので、これは矛盾である。

従って、単純群 $Co_1 \cong C_M(z)/Q_z$ は位数 2^{24} の基本可換 2 群 $\overline{Q_z}$ 上に、共役により忠実に作用する。しかもこの二元体上 24 次元のベクトル空間 $\overline{Q_z}$ 上に $q(\overline{x}) = x^2$ により定義される二次形式 q （定義 2.1 の後の段落参照）は、この作用により保たれる: $q(\overline{x}^g) = (x^g)^2 = (x^2)^g = x^2 = q(\overline{x})$ ($x^2 \in \langle z\rangle$ に注意)。ここで、「Co_1 の位数 2^{24} の基本可換 2 群への忠実な表現は一意的に定まる」という Griess の結果 [Gr] を引用する。(この結果の証明にはさほど多くの情報は必要ない。)

具体的な Co_1 の二元体上 24 次元ベクトル空間への忠実表現として次のものが知られている。Co_1 をリーチ格子 Λ の自己同型群 $Aut(\Lambda)$ の剰余群 $Aut(\Lambda)/Z(Aut(\Lambda))$ と見る。自己同型群 $Aut(\Lambda)$ はリーチ格子を法 2 で考えて得られる二元体上の 24 次元ベクトル空間

$$\hat{\Lambda} := \{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + 2\Lambda \mid \mathbf{x} \in \Lambda\}$$

に右からの行列の積により作用し、その核は $Z(Aut(\Lambda))$ (スカラー行列 $\pm I_{24}$ からなる) に一致することがわかる。従って $Co_1 \cong Aut(\Lambda)/Z(Aut(\Lambda))$ の二元体上 24 次元のベクトル空間 $\hat{\Lambda}$ への忠実な表現が得られた。

Griess の結果により、$C_M(z)/Q_z$ の $\overline{Q_z}$ への共役による表現は Co_1 の $\hat{\Lambda}$ への行列表現とみなせる。後者の表現については、非常に詳しい情報が計算で確認できるので、以後の議論が展開できる。これについてはリーチ格子を、ゴーレイ符号を用いて具体的に表示すると便利であるが、本稿では時間の関係上、その部分は省略し、位数 2^2 の特異群の分類を詳しく説明することにとどめ、ゴーレイ符号での言葉遣いがより便利になるそれより大きい位数の

特異部分群の分類については結果を記述するのみとする。これらの言葉遣いについて慣れており、細かい分類の様子に関心のある読者は、直接論文 [MS, Section 4] を参照されたい。

自然数 n に対して $\Lambda_n := \{x \in \Lambda \mid q_{\mathbf{R}}(x) = 2n\}$ とおき、Λ_n の $\hat{\Lambda}$ における像を $\hat{\Lambda}_n$ と書く。リーチ格子 Λ の定義から $\Lambda_1 = \emptyset$ であるが、整数論の結果から $|\Lambda_2| = 2 \cdot 98280$, $|\Lambda_3| = 2 \cdot 8386560$, $|\Lambda_4| = 48 \cdot 8292375$ 　がわかる。また $x \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ ならば $\hat{y} = \hat{x}$ を満たす $y \in \cup_{n=2,3,4}\Lambda_n$ は $\pm x$ の 2 個であり、$x \in \Lambda_4$ ならば $\hat{y} = \hat{x}$ を満たす $y \in \cup_{n=2,3,4}\Lambda_n$ は $\{\pm x_1, \ldots, \pm x_{24}\}$, $x_1 = x$, $x_i \in \Lambda_4$, $b_{\mathbf{R}}(x_i, x_j) = 0$ $(1 \leq i < j \leq 24)$ の形の 48 個のベクトルからなる集合をなす（このような集合を**枠** (frame または corss) という）ことが知られている。従って $\{0\} \cup_{n=2,3,4} \hat{\Lambda_n}$ は全部で $1 + |\Lambda_2|/2 + |\Lambda_3|/2 + |\Lambda_4|/48$ 個あり、この数は実際計算してみると 2^{24} に一致するので

$$\hat{\Lambda} = \{0\} \cup \hat{\Lambda}_2 \cup \hat{\Lambda}_3 \cup \hat{\Lambda}_4$$

という直和分解が得られる。実は、Co_1 の 24 次元ベクトル空間 $\hat{\Lambda}$ の非ゼロベクトルの集合上への作用の軌道は $\hat{\Lambda}_2$, $\hat{\Lambda}_3$, $\hat{\Lambda}_4$ の 3 個であることが確かめられる。

一方 $Co_1 \cong C_M(z)/Q_z$ は $\overline{Q_z}$ 上のプラス型の二次形式 q $(q(\overline{x}) = x^2,\ x \in Q_z \cong 2_+^{1+24})$ を保つので、q に関する合計 $(2^{12}-1)(2^{11}+1) = 8390655$ 個の、ゼロベクトル以外の特異ベクトルのなす集合 $\{\overline{x} \in \overline{Q_z} \mid x^2 = 1\}$ 上に作用する。従ってこの集合は、上の 3 個の軌道のうちの幾つかの合併であり、長さを見れば $\hat{\Lambda}_2 \cup \hat{\Lambda}_4$ に一致することがわかる。

これより Q_z に含まれる z 以外の位数 2 の元のなす集合上への $C_M(z)$-軌道が得られる。実際、$1 \neq x \in Q_z \setminus \{z\}$ が $x^2 = 1$ を満たせば $\overline{x}$ は上の集合 $\hat{\Lambda}_2 \cup \hat{\Lambda}_4$ に含まれる。しかも、$\overline{x} = \overline{y}$ $(y \in Q_z)$ ならば $y = x$ または $y = xz$ であるが、Q_z が非可換で $Q_z/\langle z\rangle$ が可換であることから、Q_z の元による共役で x は xz に移る。従って $\{x \in Q_z \setminus \{z\} \mid x^2 = 1 \neq x\}$ の $C_M(z)$-共役類と二つの Co_1-軌道 $\hat{\Lambda}_2$ と $\hat{\Lambda}_4$ が一対一に対応する。

$\hat{\Lambda}_n$ $(n = 2, 4)$ に対応する $Q_z \setminus \{z\}$ の $C_M(z)$-共役類を $\mathcal{O}_n$ と書くことにする。すると Q_z 中の位数 2 の元の $C_M(z)$-共役類は $\{z\}$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_4$ の 3 個である。ここで補題 2 を用いて、モンスターにおいてはこの補題の結論の後半は成り立たないことが確認できる [MS, Proposition 3.2]。従って Q_z 中の特異元の集合 $Q_z \cap \mathcal{S}$ は ($C_M(z)$ の共役の作用により不変である） $\{z\}$ を真に含む。更に $\mathcal{O}_2$ の元は特異元ではないことが示される [MS, Lemma 4.4]。従って、次がいえる。

> $Q_z \cap \mathcal{S}$ は $\{z\}$ と $\mathcal{O}_4$ の二つの $C_M(z)$-軌道に分かれる。また $|\mathcal{O}_4| = 2|\hat{\Lambda}_4|$ であり $\mathcal{O}_4$ の各元 x に対するコセット $\overline{x} = x\langle z\rangle$ はリーチ格子 Λ の枠に対応する。

これより特にモンスターにおける位数 4 の特異部分群の共役性が得られる。これは既に分類の方針で述べたところから明らかであるが、しつこく繰り返す。実際、U^1, U^2 をモンスターにおける位数 4 の特異部分群とすると、これらは共に特異元を含むので、特異元が互いに共役であることから、 U^2 をその適当な共役におきかえて $U^1 \cap U^2$ は特異元 z を含むとし

てよい。すると $U^1=\langle z,x\rangle$, $U^2=\langle z,y\rangle$ を満たす特異元 $x,y\in\mathcal{S}$ がとれる。x,y は共に z に直交しているので $x,y\in Q_z\cap\mathcal{S}$ であり、従って $x,y\in\mathcal{O}_4=(Q_z\cap\mathcal{S})\setminus\{z\}$ である。$\mathcal{O}_4$ が一つの $C_M(z)$-軌道をなすことから、適当な $g\in C_M(z)$ を取れば $x^g=y$ であり、従って $(U^1)^g=\langle z^g,x^g\rangle=\langle z,y\rangle=U^2$ が得られる。

更にここで補題 4 を用いると、位数 4 の特異部分群 $U=\langle z,x\rangle$ に対してその正規化群 $N_M(U)$ のおおよその構造を次のように決定できる。まず補題 4(2) より $N_M(U)/C_M(U)\cong L_2(2)$ であり、$U=\langle z,x\rangle$ より $C_M(U)=C_M(z)\cap C_M(x)$. また上の記号を使うと $x\in\mathcal{O}_4$、$|\mathcal{O}_4|=2|\hat\Lambda_4|$ であり、$\mathcal{O}_4$ は $C_M(z)$-軌道であったから $|\mathcal{O}_4|=[C_M(z):C_M(z)\cap C_M(x)]=|C_M(z)|/|C_M(U)|$. 従って $|C_M(U)|=|C_M(z)|/2|\hat\Lambda_4|=2^{25}|Co_1|/2|\hat\Lambda_4|$ であるが、ここで Co_1 のリーチ格子への作用における枠の固定化群が $2^{11}.M_{24}$ という構造を持つ部分群であることを使う（ここで M_{24} は 24 次マシュー群と呼ばれる位数 24.23.22.21.20.48 の散在型単純群）と、

$$|C_M(U)|=2^{24}|2^{11}.M_{24}|=2^{35}|M_{24}|$$

を得る。剰余群 $C_M(z)/Q_z\cong Co_1$ における $C_M(U)$ の像 $C_M(U)Q_z/Q_z\cong C_M(U)/(C_M(U)\cap Q_z)$ は、$\overline{Q_z}$ を 2 を法としたリーチ格子 $\hat\Lambda_4$ と見たとき、その枠 $\overline{x}$ を固定するので、部分群 $2^{11}M_{24}$ に含まれる。更に $C_M(U)\cap Q_z=C_M(x)\cap Q_z$ は位数 2^{24} の部分群（格別 2 群 Q_z の定義より）であるから、上で得た位数から $|C_M(U)/(C_M(U)\cap Q_z)|=|2^{11}.M_{24}|$、従って $C_M(U)/(C_M(U)\cap Q_z)$ は部分群 $2^{11}.M_{24}$ に同型である。特に $O_2(C_M(U))$ は位数 2^{35} の群となり ($C_M(U)\cap Q_z$ が位数 2^{24} の正規部分群で、この群による剰余群が位数 2^{11} の群)、$C_M(U)/O_2(C_M(U))\cong M_{24}$ である。このことと $Aut(M_{24})=M_{24}$ より

$$N_M(U)/O_2(C_M(U))\cong L_2(2)\times M_{24}$$

が得られる。

Q_U を定めよう。補題 5 より $Q_U=Q_z\cap Q_x$ であるが、この群は格別 2 群 Q_z の基本可換 2 部分群 (記号 2.5 の後の注意参照) なので、定義 2.1 の 2 つ後の段落で注意したように $|Q_U|\le 2^{13}$ である。さて、$C_M(U)$ の部分群 $C_M(z)\cap Q_x$ 及び $C_M(x)\cap Q_z$ を考える。共に $C_M(U)$ 中で正規な 2 部分群であることが確かめられるので、それらの積 $(C_M(z)\cap Q_x)(C_M(x)\cap Q_z)$ は $O_2(C_M(U))$ の部分群である。ここで $(C_M(z)\cap Q_x)\cap(C_M(x)\cap Q_z)=Q_x\cap Q_z=Q_U$ であり、上の段落で見たように $|C_M(z)\cap Q_x|=|C_M(x)\cap Q_z|=2^{24}$, $|O_2(C_M(U))|=2^{35}$ に注意すると

$$\begin{aligned}|(C_M(z)\cap Q_x)(C_M(x)\cap Q_z)| &= |C_M(z)\cap Q_x||C_M(x)\cap Q_z|/|Q_U|=2^{48}/|Q_U|\\ &\le |O_2(C_M(U))|=2^{35}\end{aligned}$$

より $|Q_U|\ge 2^{13}$ を得る。従って Q_U は位数 2^{13} の基本可換 2 群である。

以上により位数 4 の特異部分群に対してそれらの共役性が確立され、その代表元 U の正規化群 $N_M(U)$ の ($O_2(C_M(U))$ の構造が完全に求められていないという意味で、おおよその) 構造、及び Q_U が求められた。最後に Q_U/U 上への $N_M(U)$ の作用を調べよう。

Q_U/U は位数 2^{11} の基本可換部分群であり、２元体上 24 次元のベクトル空間 $\overline{Q_z}$（２を法としたリーチ格子 $\hat{\Lambda}$ と見る）の枠 $\overline{x}$ による剰余ベクトル空間 $\overline{Q_z}/\langle\overline{x}\rangle$ 中の 11 次元部分空間に相当する。しかもこの上に Co_1 における枠の固定化群 $2^{11}.M_{24}$ が作用する。リーチ格子のゴーレイ符号を用いた具体的表現を考えると、このような部分空間を具体的に２を法としてリーチ格子の中で書き出すことが可能である。詳しくは省略するが [MS, Lemma 4.5] 中に指摘されているような、M_{24} の作用がわかりやすい形になっている。これを見ると（補題 4 (3) と併せて）、$Q_U \setminus U$ 上に $C_M(U)$ が二つの軌道を持つことが即座にわかる。そしてそのうち特異元に属するものがただ一つであることもわかる。すなわち、$(Q_U \setminus U) \cap \mathcal{S}$ は一つの $C_M(U)$-軌道をなす。

これから、先に分類の方針で示したように、位数４の特異部分群 U_2 に対して U_2 を含む位数８の特異部分群 U_3 は互いに共役であり、従って位数８の特異部分群の共役性が得られた。後は上と同様に、$C_M(U_2)$ の中のより小さな部分群 $C_M(U_3)$ について調べていくことになる。以後の詳細は [MS, Lemma 4.7–4.14] を参照されよ。ここでは、それを次の表にまとめておく。（レイアウトの都合上ここだけ英語にしてある。s, ns はそれぞれ特異元、非特異元の意味である。第３列の上段には Q_U/U の通称が示されている。）

U	Q_U/U	as $C_M(U)-$ module	Nontrivial orbits of $N_M(U)$ on $U \times Q_U/U$	kernel Q_U
2	2^{24}	Leech lattice mod 2 $\hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_3 + \hat{\Lambda}_4$	$Co1$	1
2^2	2^{11}	$Even(\mathbf{F}_2^{24})/$ Golay code 2 pts + sextets	$L_2(2) \times M_{24}$	$[2^{22}]$
2^3	2^6	Hexacode 18(ns) + 45(s)	$L_3(2) \times 3S_6$	$[2^{30}]$
2^4	2^3	permutation module 3(s) + 3(ns) + 1(s)	$L_4(2) \times S_3$	$[2^{32}]$
2^5_1	2	ns	$L_5(2)$	$[2^{30}]$
2^5_2	1		$L_5(2)$	$[2^{30}]S_3$

要するに上のような議論を繰り返すと位数 2^3, 2^4 の特異部分群の共役性が確立されるが、位数 2^5 の特異部分群は二つの共役類に分かれる。この二つの共役類の違いは、代表元の正規化群で区別される。正規化群が $[2^{30}]L_5(2)$ という形の代表元を持つ位数 2^5 の特異部分群の共役類を $\mathcal{S}^5_1$、正規化群が $[2^{30}](L_5(2) \times S_3)$ という形の代表元を持つ位数 2^5 の特異部分群の共役類を $\mathcal{S}^2_5$ と記す。また、それぞれの $i = 1, 2, 3, 4$ に対して、位数 2^i の特異部分群の共役類を $\mathcal{S}_i$ と記す。

$\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ の代表元である、位数それぞれ 2, 2^2, 2^3 の特異部分群の正規化群は、第一章の極大２局所部分群のリストに、それぞれ P_1, P_2, P_3 として現れる。

位数が 2^4 の特異部分群 U_4 の正規化群は極大局所 2 部分群になり得ない。というのは、上の表から見られるように、Q_{U_4}/U_4 は位数 2^3 の基本可換 2 群であって、この群の位数 2 の元の集合は長さ 3, 3, 1 の 3 個の $N_M(U_4)$-共役類に分かれ、はじめの共役類が $\mathcal{S}_5^1$ に対応し、一番最後の共役類が $\mathcal{S}_5^2$ に対応する（分類の方針参照）。特に、

U_4 を含む $\mathcal{S}_5^2$ 中の特異部分群 U_5^2 が、ただ一つ存在する。

従って $N_M(U_4) \le N_M(U_5^2)$ となり、位数を見ればこれは真の包含関係であるので、$N_M(U_4)$ は極大な 2 局所部分群になり得ないのである。

また、位数 2^5 のどの特異部分群 U に対しても Q_U/U は特異元に対応する元を含まないので、位数 2^6 以上の特異部分群は存在しない。また、第一章のリストに P_5 として登場するのは $\mathcal{S}_5^2$ に属する位数 2^5 の特異部分群の正規化群であって、$\mathcal{S}_5^1$ に対するものではない。その事情は次の「箱船」の構成につながる。

定義 3.3 箱船 $\mathcal{S}_5^1$ に属する位数 2^5 の特異部分群 U を取る。すると $N_M(U)$ は U の全自己同型群 $L_5(2)$ を引き起こすので U の位数 2^4 の部分群はすべて $N_M(U)$ の作用により共役である。U の位数 2^4 の部分群 E は特異部分群で $\mathcal{S}_4$ に属するから、上の注意により E を含むような $\mathcal{S}_5^2$ に属する特異部分群がただ一つ存在する。それを仮に $U_5^2(E)$ と書くことにする。このとき、モンスターの次の形の部分群 $A(U)$ のことを ($U \in \mathcal{S}_5^2$ が定める) **箱船** (ark) という:

$$A(U) := \langle U_5^2(E) \mid E \in \mathcal{S}_4, E \subset U \rangle.$$

$\mathcal{S}_5^1$ が共役類であることから、箱船たちはモンスターにおいて互いに共役であることもわかる。箱船及びその正規化群の構造に関して次の事実が示される。

Proposition 6 *[MS, Section 5]* $U \in \mathcal{S}_5^1$ に対して $A = A(U)$ とおく。

(1) A は位数 2^{10} の基本可換 2 群である。また A と A/U という二元体上 5 次元のベクトル空間は共役による作用により $N_M(U)$-加群と見なせるが、この構造は互いに他の双対である。

(2) A の中心化群 $C_M(A)$ は位数 2^{10+16} の 2 部分群で、その交換子部分群及び中心は A に一致し、剰余群 $C_M(A)/A$ は位数 2^{16} の基本可換群である。

(3) $N_M(A)/C_M(A)$ は二元体上 10 次元のプラス型の二次形式に対応する直交群の交換子部分群 $\Omega_{10}^+(2)$ と同型である。実際に、A を二元体上の 10 次元ベクトル空間とみたとき $x \in A$ に対して x が単位元ないしは特異元ならば $f(x) = 0$ それ以外ならば $f(x) = 1$ として定められる二次形式 f は $N_M(A)/C_M(A)$ の共役による作用により保たれるプラス型の二次形式である。

(4) A 中の特異元 x に対して、上の二次形式に付随するシンプレクティック形式に関して x と直交するような A のベクトルのなす部分空間は $A \cap Q_x$ に一致する。

この基本定理により、特異部分群は、すべてある一つの箱船に含まれる部分群に共役である。しかも、それらの部分群はこの箱船（二元体上 10 次元のベクトル空間）上に定義されたプラス型の二次形式に関する全特異部分空間になっている。すなわち、箱船はすべての‘種’(特異部分群たち）を全特異部分空間として載せている。これが箱船という命名のいわれである。

箱船 A をプラス型の二次形式を備えた二元体上 10 次元のベクトル空間と見ると A における位数 2^4 の特異部分群 U_4 は 4 次元の全特異部分空間である。U_4 を含む極大全特異部分空間は二つあり、相異なる $\Omega_{10}^+(2)$-軌道に属していた（定義 2.1 の後の段落での注意参照）が、これらは U_4 を含む $\mathcal{S}_5^1$ と $\mathcal{S}_5^2$ に属する特異部分空間に対応する。U_4 を含む $\mathcal{S}_5^2$ の特異部分群がただ一つであるという先に紹介した事実は、この結果と矛盾しない。しかし U_4 を含む $\mathcal{S}_5^1$ の特異部分群は M 全体では 3 個ある。

また $\mathcal{S}_5^1$ に属する特異部分群 U に対してそれを含む箱船は、一般には $A(U)$ 以外にも（別の $U' \in \mathcal{S}_5^1$ に対する箱船 $A(U')$ として）存在する可能性があるが、それらは実は $A(U)$ に一致することが示せる [MS, Lemma 5.10]。つまり $U \in \mathcal{S}_5^1$ を含む箱船は $A(U)$ ただ一つであって、特に $N_M(U) \le N_M(A(U))$ である。これが特異部分群 $U \in \mathcal{S}_5^1$ の正規化群が極大 2 局所部分群にはならない理由である。一方 $U \in \mathcal{S}_5^2$ を含む箱船はちょうど 3 個存在する。

箱船は次のようにも構成できる [MS, Lemma 5.3 等]。剰余群 $C_M(z)/Q_z \cong Co_1$ $(z \in \mathcal{S})$ においてその Co_1 における中心化群が $2_+^{1+8}\Omega_8^+(2)$ という形の位数 2 の元を考える。(Co_1 も大きな格別部分群を持っていた。定義 2.2 のあとの表を参照。）この位数 2 の元に対応するようなモンスターの特異元 x があることが示される。すると $Q_z\langle x\rangle$ は位数 2^{1+24+1} であって、$\langle z\rangle$, $[Q_z, x]\langle z\rangle/\langle z\rangle$, $C_{Q_z}(x)/[Q_z, x]$, $Q_z/C_{Q_z}(x)$ 及び $Q_z\langle x\rangle/Q_z$ という 5 個の $C_M(z) \cap C_M(x)$-組成剰余部分群を持つ。（それぞれの位数は 2, 2^8, 2^8, 2^8, 2 である。）このとき $A = \langle z, [Q_z, x], x\rangle$ とすると、A は箱船である。

この節の最後に二つの事実を補足する。まず、モンスターの位数 2 の元の共役類は次のように決定される。論文 [MS] では、この部分に必要な詳細な情報を [At] のドットワンのページから引用しているが、一箇所ミスプリントがある (2 を法としたリーチ格子中の 444 型の基本可換 2 群の固定化部分群の構造が $[2^{12}]L_3(2)$ ではなく $[2^{11}]L_3(2)$) とのことである。

Lemma 7 *[MS, Lemma 7.6]* モンスターの位数 2 の元の共役類は特異元の共役類 $\mathcal{S}$ と特異元でないような位数 2 の元のなす集合 $\mathcal{S}'$ の合計 2 個からなる。

（アトラス [At] では $\mathcal{S}'$ の元を $2A$-元、特異元のことを $2B$-元と呼んでいる。）

可換な特異元の対 $\{a, b\}$ に対する $Q_a \cap Q_b$ （これは基本可換群であった）の構造が次のように定まる。場合分けの名称は位数 2 の元 ab の $C_M(a)/\langle a\rangle \sim 2^{24}.Co_1$ における像が属する共役類の名称に由来する。

Lemma 8 *[MS, Lemma 7.7]* モンスターの相異なる可換な特異元 $a, b \in \mathcal{S}$ に対し、次の4つの場合のいずれかひとつが成立する。

($2e_4$) a と b は直交する（このとき $ab \in \mathcal{S}$）.

($2a_1$) $Q_a \cap Q_b$ は位数 2^8 の基本可換2群で、a と b を含む箱船 A がただひとつ存在する。更に箱船 A 上の直交形式に関して $\langle a, b\rangle$ は2個の非ゼロ特異ベクトル $a, b \in \mathcal{S}$ と1個の非特異ベクトル $ab \in \mathcal{S}'$ を持つ2次元部分空間で $A = \langle a, b\rangle \times (Q_a \cap Q_b)$ と分解する。

($2a_3$) $Q_a \cap Q_b$ は位数 2^5 の基本可換2群で $ab \in \mathcal{S}$.

($2c$) $Q_a \cap Q_b$ は位数 2^2 の基本可換2群で $ab \in \mathcal{S}$.

4. 標数2型ではないような極大2局所部分群の分類

この節では、モンスターの極大2局所部分群のうち、標数2型ではないものの分類のあらすじを述べる。論文 [Me] がこの場合を扱っているが、そこにも述べられているように、この場合は扱いやすい。それを示唆するのが次の補題である。ここでは、しばらく一般論に戻る。証明には、有限群論の古典的な論法（素な作用、トンプソンの $P \times Q$ 補題）が使われるので、多少くどい程度に説明する。

Lemma 9 有限群 G の p-部分群 $A \neq 1$ に対し、$Q := O_p(C_G(A))$, $Q^* := O_p(N_G(A))$ とおけば次の二つの条件は同値である。

(*a*) $C_G(Q^*) \leq Q^*$

(*b*) $C_G(QA)$ は p-部分群である。

証明 (a)$\Longrightarrow$(b): $C_G(QA)$ の p'-元（位数が p と互いに素な元）の全体から生成される群を E とする。E は $C_G(QA)$ の正規(じつは特性) 部分群で剰余群が p-群となるもののうち最小のものである。(b) を示すには $E = 1$ をいえばよい。

$E \leq C_G(QA) \leq C_G(A) \leq N_G(A)$ だから E は p-群 $Q^* = O_p(N_G(A))$ を正規化する（共役により作用する)。他方 $Q = O_p(C_G(A))$ は$C_G(A)$ の特性部分群で、$C_G(A)$ は $N_G(A)$ の正規部分群だから、Q は $N_G(A)$ の正規なp-部分群。従って Q^* ($\leq N_G(A)$) は Q を正規化し、QA も正規化する。そこで Q^* は $C_G(QA)$ を、従って E をも正規化する。従って

$$[Q^*, E] = \langle [q, x] \mid q \in Q^*, x \in E\rangle \leq Q^* \cap E.$$

$E \cap Q^*$ は E の正規な p-部分群なので $E \cap Q^* \leq O_p(E)$ である。ここで $O_p(E)$ は $C_G(A)$ の正規な p-部分群だから $O_p(E) \leq Q = O_p(C_G(A))$ であり、$[[E, Q^*], E] \leq [E \cap Q^*, E] \leq [O_p(E), E] \leq [Q, E] = 1$ ($E \leq C_G(QA) \leq C_G(Q)$ に注意）を得る。つまり

$$[[E, Q^*], E] = 1.$$

$C_G(QA)$ の任意の p'-元 x を取る。$\langle x\rangle$ は E の p'-部分群（位数が p と互いに素な群）で p-群 Q^* に共役により作用している。このような作用（**素な作用** (coprime action) という）における基本的結果（例えば [Ko, 定理 7.5 系 (i)]）から次の分解を得る。

$$Q^* = C_{Q^*}(x)[Q^*, \langle x\rangle].$$

$x \in E$ なので、上の段落の結果から、$[Q^*, \langle x\rangle]$ は x と可換であり、従って $[Q^*, \langle x\rangle] \le C_{Q^*}(x)$ となる。すると上の分解から $Q^* = C_{Q^*}(x)$、すなわち x は Q^* と可換: $x \in C_G(Q^*)$ である。条件 (a) を仮定していたから $C_G(Q^*) \le Q^*$ であり、p'-元 x は p-群 Q^* に含まれ $x = 1$ を得る。これが $C_G(QA)$ の任意の p'-元 x について成立するので $E = 1$ である。よって $C_G(QA) \cong C_G(QA)/E$ は p-群となり条件 (b) が得られた。

(b)$\Longrightarrow$(a): $C_G(QA)$ が p-群であるとする。QA は $N_G(A)$ の正規部分群であることが確かめられるので、$QA \le O_p(N_G(A)) = Q^*$. そこで $C_G(Q^*) \le C_G(QA)$ であり、$C_G(Q^*)$ は p-部分群となる。$C_G(Q^*)$ は $N_G(A)$ の正規部分群であることが確かめられるので $C_G(Q^*) \le Q^* = O_p(N_G(A))$ である。これは条件 (a) に他ならない。 **Q.E.D.**

Lemma 10 $A \ne 1$ は有限群 G の p-部分群で p-部分群 $B \ne 1$ を含むとする。このとき、B が補題 *9* の条件を満たせば、A も補題 *9* の条件を満たす。

証明 $Q_A := O_p(C_G(A))$, $Q_B := O_p(C_G(B))$ とおく。$C_G(Q_B B)$ が p-部分群であるというのが仮定である。指数 $[A:B]$ に関する帰納法で示す。そこで証明は $[A:B] = p$ の場合に帰着される。このとき B は A の正規部分群である。x を $C_G(Q_A A)$ の p'-元とする。$x = 1$ をいえば $C_G(Q_A A)$ は p-群となり、証明が完成する。

$B \le A$ より x は B と可換であり、よって Q_B を正規化する。一方 B は A 中正規なので A も Q_B を正規化する。そこで p-群と p'-群の直積 $\langle A, x\rangle = A \times \langle x\rangle$ が p-群 Q_B に作用する。このような状況でよく使われるのが**トンプソンの** $P \times Q$**-補題**である ([Ko, 補題 7.25])。これを適用するために元 x の $C_{Q_B}(A)$ への作用について調べる。Q_B は $C_G(B)$ 中正規で $C_G(A) \le C_G(B)$ なので、$C_{Q_B}(A) = Q_B \cap C_G(A)$ は $C_G(A)$ の正規な p-部分群であり $C_{Q_B}(A) \le O_p(C_G(A)) = Q_A$ である。この式の右辺には $x \in C_G(Q_A A)$ は自明に作用するので、x は $C_{Q_B}(A)$ に自明に作用する。従ってトンプソンの補題が適用できて、x は Q_B 全体に自明に作用する。x は B と可換なので $x \in C_G(Q_B B)$ となり、$C_G(Q_B B)$ が p-群という仮定から、目指す結論 $x = 1$ を得る。 **Q.E.D.**

さて補題 9, 10 を用いると、モンスター M の極大 2 局所部分群のうち、標数 2 型ではないもの L が次のように分類できる。$A := O_2(L)$ とおくと、定義 1.1 の後のコメント (1) より $L = N_M(A)$ である。また定義 1.2 の後のコメント (2) より L が標数 2 型ではないという条件は $C_M(A) \not\le A$ と同値である。$Q^* := O_2(N_M(A)) = O_2(L) = A$ なので、このことは $G = M$ の 2-部分群 A が補題 9 の条件 (a) を満たしていないということである。従って補題 10（の対偶）により A のいかなる部分群 B も補題 9 の条件 (b) を満足しない、つまり

$Q_B := O_2(C_M(B))$ とすれば $C_M(Q_BB)$ は 2-群ではない。B として A の位数2の元 t で生成される群 $\langle t\rangle$ を選べば $Q_{\langle t\rangle} = O_2(C_M(t)) \ni t$ であるから $Q_{\langle t\rangle}\langle t\rangle = Q_{\langle t\rangle}$ であり、$C_M(Q_{\langle t\rangle})$ は 2-群ではない。$t \in \mathcal{S}$ と仮定すれば $Q_{\langle t\rangle} = O_2(C_M(t)) = Q_t$ は2部分群であり、矛盾である。従って t は特異元ではない。そこでモンスターの位数2の元の共役類が2個であったこと（補題 7）から A の位数2の元 t はすべて（特異元の集合ではない）共役類 $\mathcal{S}'$ に属する。

A の中心に属する位数2の元全体から生成される A の特性部分群を E とすると $L = N_M(A) \leq N_M(E)$ であるので、L の2局所部分群としての極大性から $L = N_M(E)$ である。また E は基本可換2部分群であり、上で見たことから $E^\# \subseteq \mathcal{S}'$ である。そこで、このような基本可換2部分群を分類すれば、その正規化群として L が求められる。実は次の事実が確かめられる ([Me, Section 3])。

Lemma 11 モンスター M の基本可換2部分群 E が特異元を含まなければ、E の位数は 2 か 4 である。また位数 2 *(または 4)* のこのような部分群は互いに共役で、その正規化群の構造は $2.BM$ *(または* $2^2.{}^2E_6(2).S_3$*)* となる。

従って、標数2型ではない極大2局所部分群 L は $L_1 \sim 2.BM$ または $L_2 \sim 2^2.{}^2E_6(2).S_3$ のいずれかに共役となる。（ここで BM はベビーモンスターと呼ばれる散在型単純群である。むしろ、これが定義である、つまり、モンスターにおける特異元ではない方の位数2の元の中心化群の中心による剰余群がベビーモンスターと定義される、と考えて良い。また ${}^2E_6(2)$ は4元体上の E_6 型の Chevalley 群 $E_6(4)$ のグラフ自己同型による固定点全体からなる単純群である。どちらも詳しい構造の記述は省略する。）

5. 標数2型の極大2局所部分群の分類–肝心な部分

この節ではモンスターの標数2型の極大2局所部分群の分類のさわりについて解説する。第3節でモンスターの特異部分群を分類し、箱船を構成した。そして、それらの正規化群のうち、包含関係に関して極大である可能性のあるものは、位数 $2, 2^2, 2^3$ の特異部分群、共役類 $\mathcal{S}_5^2$ に属する位数 2^5 の特異部分群及び箱船（位数 2^{10} のある種の基本可換2部分群。特異部分群ではない）に限ることを見た。これらの群の正規化群の構造を比較すれば、これらのうちのどの二つにも（片方の正規化群のどの様な共役を取ったとしても）包含関係は成立しないことが確かめられる。そこで、次のことを示せば、（L の2局所部分群としての極大性から）$L = N_M(E^*)$ となり、E^* は上の特異部分群または箱船に共役になる。よって L は第一節のリストで P_1, P_2, P_3, P_5 及び P_{10} と記された群に共役となる。

> モンスター M の極大2局所部分群 L が標数2型ならば、L はある特異部分群ないしは箱船 E^* を正規化する。

従って、以下この命題を示す。$Q = O_2(L)$ とおき Q の中心 $Z(Q)$ の位数2の元全体により生成される群を E (有限群論の慣用記号では $\Omega_1(Z(Q))$) とする。E は L の非自明な正規部分群で、基本可換2群である。

Q を含む M の2シロー群 T を取る。M は大きな格別部分群を持つ群なので（定義 2.2 の後の注意により）T の中心 $Z(T)$ は位数2であり、その生成元 z_0 は特異元である。さて L は標数2型であると仮定したから $C_M(Q) = Z(Q)$ であり（定義 1.2 の後の注意参照）、このことから $Z(Q)$ 従って E は $Z(T)$ 中の位数2の元 z_0 を含む。特に $E^\# \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ である。そこで $E^\# \cap \mathcal{S}$ の元 z に対して $E \cap Q_z$ が考えられるが、この群の位数が最大になるようなものを集めて I とおく：

$$I := \{z \in E^\# \cap \mathcal{S} \mid |E \cap Q_z| \geq |E \cap Q_x| \ (\forall x \in E^\# \cap \mathcal{S})\}.$$

すると I は空集合ではなく、この上に L が共役により作用するので、I が生成する部分群 $\langle I \rangle$ は E の自明でない部分群（特に基本可換2部分群）で L により正規化される。

以下、$E^* := \langle I \rangle$ が特異部分群でも箱船でないとして矛盾を示す。すると主張が導かれる。

もし、生成集合 I $(\subset \mathcal{S})$ のどの二つの元 a, b も直交するとすれば、$ab \in \mathcal{S}$ であるから $\langle I \rangle^\# \subset \mathcal{S}$ であり $\langle I \rangle$ は特異部分群になる。従って、適当な I の相異なる元の対 (a, b) を取れば $ab = ba$ であるが a と b は直交しない。従って、補題 8 の場合 $(2a_1)$, $(2a_3)$ または $(2c)$ のいずれかが成立する。

かなりの労力を費やして、場合 $(2a_3)$ と $(2c)$ が起こらないことが示せる [MS, Lemma 9.3, Cor.9.12]. そこで残るは (a, b) が場合 $(2a_1)$ に属するときである。このときには a, b を共に含む箱船 A がただ一つ存在する。a, b は Q の中心に入っているので Q と可換であり、従って a, b を含む箱船が A ただ一つであることから、2群 Q は箱船 A に共役により作用する。

さて、この場合 I の定義と数え上げ議論によって、次が示せる:

$$E \cap Q_a \leq A, \quad E \cap Q_b \leq A.$$

この前提の元で、以下求める矛盾を導いて見せよう。まず命題 6 を復習する。箱船 A 上には次の二次形式 f が定義されていた：$x \in A^\#$ に対して $f(x) = 0$ (resp. 1) は $x \in \mathcal{S}$ (resp. $x \in \mathcal{S}'$) のとき、そのときに限る。この二次形式は $N_M(A)/C_M(A) \cong \Omega_{10}^+(2)$ の作用で保たれ、f に付随するシンプレクティック形式に関して $x \in A^\# \cap \mathcal{S}$ と直交するベクトルのなす A の部分空間 $x^\perp$ は $A \cap Q_x$ に一致していた。ここで $x^\perp$ は二元体上の 10 次元ベクトル空間と見たときの箱船 A の超平面（余次元 1 の部分空間）であることに注意せよ。

まず、次の二つの事実を示す。

(i) $E \cap A \cap \mathcal{S} \subset I$.

(ii) すべての $e \in E \cap A \cap \mathcal{S}$ に対して $E \cap Q_e \leq A$.

証明：2元体上の 10 次元ベクトル空間 A の部分空間 $E \cap A$ と A の超平面 $a^\perp = A \cap Q_a$ の共通部分を考えると、それは $E \cap Q_a \leq A$ より $(E \cap A) \cap a^\perp = E \cap A \cap Q_a = E \cap Q_a$ に一致する。これは $E \cap A$ 自身または $E \cap A$ の超平面であるが、$b \in E \cap Q_b$ だが $b \notin Q_a$（a と b は直交しない）に注意すれば、後者が成立している。特に $|E \cap Q_a| = |E \cap A|/2$ である。集合 I $(\ni a)$

の定義から $E \cap A \cap \mathcal{S}$ $(\subset E^{\#} \cap \mathcal{S})$ のどの元 e に対しても $|E \cap Q_e| \le |E \cap Q_a| = |E \cap A|/2$ である。上と同様に $E \cap A$ と A の超平面 $e^{\perp} = A \cap Q_e$ の共通部分 $E \cap A \cap Q_e$ は $E \cap A$ 自身かまたはその超平面である。従って $|E \cap A \cap Q_e| \ge |E \cap A|/2$ であるが、直前の不等式とあわせると $|E \cap A \cap Q_e| \ge |E \cap Q_e|$ が得られる。従って $E \cap A \cap Q_e = E \cap Q_e$ であり、$E \cap Q_e \le A$、つまり主張 (ii) を得た。またこのとき等号 $|E \cap Q_e| = |E \cap Q_a| = |E \cap A|/2$ も成立するので、集合 I の定義を振り返れば主張 (i) が出る。

次に、以下の包含関係を示す。ここでは二次形式に関する特異ベクトルの個数についてのある観察が鍵になる。

(iii) $A \le E.$

証明：非特異な二次形式 f を備えたベクトル空間 A において部分空間 $E \cap A$ の直交補空間 $F := (E \cap A)^{\perp}$ (f に付随するシンプレクティック形式に関して $E \cap A$ のベクトルすべてに直交するベクトルのなす A の部分空間) を考える。$F = 1$ (ゼロベクトルのみからなる空間) であることを示せば、シンプレクティック形式の非退化性から $E \cap A = A$ となり、求める結論 $A \le E$ を得る。上に注意したように $Q := O_2(L)$ は箱船 A を正規化したので、Q $(\le N_M(A))$ は箱船 A 上の二次形式 f を保つ。また Q は $E = \Omega_1(Z(Q))$ も正規化するので $F = (A \cap E)^{\perp}$ も正規化することに注意する。

そこで $F \neq 1$ と仮定して、二次形式 f を部分空間 F に制限したときのゼロベクトル以外の特異ベクトルの個数 $|F \cap \mathcal{S}|$ の偶奇を考える (f の制限 $f|_F$ は非特異とは限らないことに注意)。F の根基 $r(F) := F \cap F^{\perp}$ が自明でなければ、$F = r(F) \oplus C$、C は F の部分空間でそこへの f の制限 $f|_C$ は非特異、という形に分解できるので、F に含まれる特異ベクトル全体 (ゼロベクトルも含めて) の集合は $r(F) \oplus (\mathcal{S} \cap C)$ に一致することが確かめられる。$r(F) \neq 1$ なので、$|r(F)|$ は 2 の真のべきであり、$|r(F) \oplus (\mathcal{S} \cap C)|$ は偶数で、従って F に含まれるゼロベクトルではない特異ベクトルの個数 $|F \cap \mathcal{S}|$ は奇数。F の根基が自明ならば $f|_F$ は F 上の非特異な二次形式である。F が 1 次元ならば F はゼロベクトル以外の特異ベクトルを含まない。F の次元が 2 以上ならば、次元は偶数 $2m$ であって、$|F \cap \mathcal{S}| = (2^m - \varepsilon)(2^{m-1} + \varepsilon)$ である。(定義 2.1 の後の注意参照。ここで f がプラス型かマイナス型であるに応じて $\varepsilon = 1$ か $\varepsilon = -1$。) 従って $m = 1, \varepsilon = -1$ の時以外は $|F \cap \mathcal{S}|$ は奇数である。($m = 1, \varepsilon = -1$ のときには F は非ゼロベクトルである特異ベクトルを持たない。)

上の考察の元で、以下場合を 3 つに分ける。まず、F が 2 次元でそこへの f の制限が非特異でゼロベクトル以外の特異ベクトルを持たない場合を考える。このとき基本可換 2 群 F の自明でない元はすべて共役類 $\mathcal{S}'$ に属す。2 群 Q は奇数個の元のなす集合 $F^{\#}$ 上に作用するから、長さ 1 の軌道を持つ。従ってある位数 2 の元 $t \in F^{\#} \subset \mathcal{S}'$ が存在して $t \in C_M(Q) = Z(Q)$ である。従って $t \in E = \Omega_1(Z(Q))$ であり $F \le A$ と併せて $t \in E \cap A$. しかし $t \in F = (E \cap A)^{\perp}$ であるので、これは $t \in r(F) = F \cap F^{\perp}$ を意味し、制限 $f|_F$ が非特異であることに反する。

次に、F が 1 次元でゼロベクトルでないベクトルが非特異ベクトルである場合を考える。$F = (E \cap A)^{\perp}$ は一次元だから $E \cap A$ は A の超平面である。Q は A を正規化しているので

$N_M(A)/C_M(A) \cong \Omega_{10}^+(2)$ の部分群を引き起こすが、$E \le Z(Q)$ なので、Q の作用は A の超平面 $E \cap A$ のすべてのベクトルを固定する。このような $\Omega_{10}^+(2)$ の元は単位行列に限ることがすぐわかるので、$Q \le C_M(A)$ である。従って　$A \le C_M(Q) = Z(Q)$ であり、よって結論 (iii) $A \le E = \Omega_1(Z(Q))$ が導かれる。

最後に、残った一般の場合を考える。このときは $F \cap \mathcal{S}$ は奇数個の元からなる集合で、その上に2群 Q が作用する。従って Q はある元 $e \in F \cap \mathcal{S}$ と可換であり、このとき $e \in C_M(Q) = Z(Q)$、従って $e \in E = \Omega_1(Z(Q))$ となる。すると e は $E \cap F \cap \mathcal{S}$、従って $E \cap A \cap \mathcal{S}$ に属する。上の結果 (i) により、このとき $e \in I$ である。ところが、$e \in F = (E \cap A)^\perp$ であるから $E \cap A \le E \cap A \cap e^\perp = E \cap Q_e$ (後者の等号は (ii) より)、特に $|E \cap A| \le |E \cap Q_e|$ $(e \in I)$ である。ここで $|A \cap E|/2 = |E \cap Q_a|$ $(\in I)$ でもあったから（主張 (i) の証明参照)、これは集合 I に属する元の定義を考えれば矛盾である。

以上 (i)–(iii) から最終的な矛盾を導こう。(i) と (iii) から $A \cap \mathcal{S} \subseteq I$ である。また、E の取り方と (iii) から $Q \le C_M(E) \le C_M(A)$ である。ここで $C_M(A)$ は命題6(3) から位数 2^{10+16} の部分群で、E $(\le Q)$ は $C_M(A)$ の基本可換2部分群である。$E = A$ ならば L の2局所部分群としての極大性から $L = N_M(A)$ となり、L が箱船を正規化してしまう。そこで E は箱船 A とは異なるとしてよい。すると、ある元 $s \in E \setminus A$ が存在する。[MS, Lemma 8.1] によると $W(s) := \langle a \in A \cap \mathcal{S} \mid s \in Q_a \rangle$ という A の部分群を考えれば、これは位数 2^4 または 2^5 の基本可換部分群をなす。特に $W(s) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. ところが 任意の $a \in W(s) \cap \mathcal{S}$ に対して $a \in A \cap \mathcal{S}$ である。(iii) により $E \cap A \cap \mathcal{S} = A \cap \mathcal{S}$ であるので (ii) を使うと、$E \cap Q_a \le A$ でなければならない。ところが $s \in E$ であり $W(s)$ の定義から $s \in E \cap Q_a$ だから $s \in A$ となってしまい、これは $s \in E \setminus A$ と選んだことに反する。従って最終的に矛盾が得られた。

後書き

以上において、数理研での講演時において意図した内容はほぼ語り尽くせたと思う。思いつくままに幾つか注意を挙げて本稿の結びとしたい。

(1) ベビーモンスターの極大2局所部分群もほぼ同様に分類できる。モンスターの一つの非特異な位数2の元 $t \in \mathcal{S}'$ を固定する。論文 [MS] においては、$t \in Q_U$ を満たす特異部分群 U 及び $t \in A$ を満たす箱船 A の分類を行うことにより、モンスターとベビーモンスターの標数2型の極大2局所部分群の分類が平行して達成されている。

(2) 本稿では素数2に特定して大きな格別部分群を持つ単純群の一般論とその応用の一端を解説したが、素数3についても似たような状況を満たす単純群が存在する。例えばモンスターのある位数3の元の中心化群は $3^{1+12}2Suz$ と表せる構造を持つ。この群のモンスターへの埋め込まれ方に関する多少の情報から出発して、モンスターの極大3局所部分群のより理解しやすい分類が可能であるようにも思われる。

参考文献

[As] M. Aschbacher, *Sporadic groups*, Cambridge Tracts in Math. **104**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[At] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[Gr] R. L. Griess, A remark about representations of .1, *Comm. Alg.* **13** (1985), 835–844.

[Ko] 近藤武, 群論 II, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 1976.

[Me] U. Meierfrankenfeld, Maximal 2-local subgroups of the Monster and Baby Monster, II, preprint, September 6, 2002.

[MS] U. Meierfrankenfeld and S. Shpectorov, Maximal 2-local subgroups of the Monster and Baby Monster, preprint, September 6, 2002.

謝辞　複数の分厚い論文の査読や自分自身の論文に関する仕事などが重なり、3月中にこの原稿が完成できるかどうかやや不安でした。無事締め切りに間に合わせられたのは、非常においしい珈琲と静かな環境を提供して頂いたある素敵なお店のおかげです。何時間も滞在することを許して頂いた店長に心からの感謝を捧げます。

２００４年3月２４日　吉荒 聡